# 7 Sistemas de ecuaciones

## INTRODUCCIÓN

Aunque no es el objetivo de este curso, los alumnos deben ser capaces de reconocer ecuaciones con dos incógnitas y obtener algunas soluciones de ellas. La obtención de sistemas equivalentes a uno dado es fundamental, ya que permite hallar la solución del sistema dado, de forma más sencilla.

Se exponen a lo largo del tema los métodos de resolución de sistemas: método de sustitución, método de igualación y método de reducción. Se deben dejar claro los pasos que se seguirán para resolver un sistema por cada uno de los métodos mencionados, así como señalar sus similitudes y diferencias con los otros métodos. Asimismo, se explicará a los alumnos que la mayor o menor idoneidad de cada uno de ellos depende de los coeficientes de las incógnitas.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas*, $x$ e $y$, se expresa de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números que, al reemplazarlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un *sistema* es *compatible* si tiene solución.
- Dos *sistemas* son *equivalentes* si tienen la misma solución.
- *Método de sustitución*: despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra.
- *Método de igualación*: despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones, e igualar las expresiones obtenidas.
- *Método de reducción*: buscar un sistema equivalente donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales y opuestos; restar o sumar las ecuaciones, eliminando así una incógnita, y resolver la ecuación.

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Identificar sistemas de ecuaciones y sus elementos. | • Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.<br>• Coeficientes y términos independientes.<br>• Solución de un sistema. | • Identificación de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.<br>• Sistemas compatibles. |
| **2.** Resolver sistemas mediante el método de sustitución. | • Método de sustitución. | • Resolución de un sistema por el método de sustitución. |
| **3.** Resolver sistemas mediante el método de igualación. | • Método de igualación. | • Resolución de un sistema por el método de igualación. |
| **4.** Resolver sistemas mediante el método de reducción. | • Método de reducción.<br>• Sistemas equivalentes. | • Resolución de un sistema por el método de reducción.<br>• Obtención de sistemas equivalentes. |

# 7

OBJETIVO 1

## IDENTIFICAR SISTEMAS DE ECUACIONES Y SUS ELEMENTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de las que se busca una solución común.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textbf{Coeficientes} \text{ de las incógnitas: } a, a', b, b' \\ \textbf{Términos independientes: } k, k' \end{array}\right.$$

### EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x - 2y = 2} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Incógnitas: } x, y \\ \text{Coeficientes de las incógnitas: } 1, 1, 1, -2 \\ \text{Términos independientes: } 5, 2 \end{array}\right.$$

**1** **Determina las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 7 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x + y = -1 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica ambas ecuaciones.
- **Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar sus soluciones.
- **Si un sistema tiene solución**, es decir, si se pueden encontrar dos números que cumplan las dos ecuaciones, se dice que es **compatible**.

### EJEMPLO

**Comprueba si el siguiente sistema de ecuaciones tiene como solución $x = 4$ e $y = 1$.**

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x - 2y = 2} \end{array}\right\}$$

Veamos si la solución del enunciado verifica las dos ecuaciones del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 4,\ y = 1} \left.\begin{array}{r} 4 + 1 = 5 \\ 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, $x = 4$ e $y = 1$ es una solución del sistema. El sistema es compatible.

**2** **Determina si $x = 0$ e $y = -1$ es solución de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 2 \\ 3y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + 4y = -4 \end{array}\right\}$

 

OBJETIVO 2

# RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN 7

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**, debemos:

a) **Despejar** la incógnita en una de las dos ecuaciones.

b) **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.

c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.

d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

## EJEMPLO

**Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.**

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 30} \\ \boldsymbol{x - y = 10} \end{array}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita $x$ de la segunda ecuación.

$$x = 10 + y$$

b) **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación.

$$x + y = 30 \xrightarrow{x = 10 + y} (10 + y) + y = 30$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} (10 + y) + y &= 30 \\ 10 + y + y &= 30 \\ 10 + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 10 \\ y &= \frac{20}{2} \\ \boxed{y = 10} \end{aligned}$$

d) **Sustituimos** el valor $y = 10$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x + 10 &= 30 \\ \boxed{x = 20} \end{aligned}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hay que sustituir el par de valores (20, 10) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 20,\, y = 10} \left.\begin{array}{r} 20 + 10 = 30 \\ 20 - 10 = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \text{Cumple la ecuación.} \\ \to \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 20$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 7

**1** **Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \mathbf{5} \\ \boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} &= \mathbf{2} \end{aligned}\right\}$$

a) Elegimos para despejar la incógnita $y$ en la primera ecuación.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = 5 - x$$

b) Sustituimos esta incógnita en la segunda ecuación.

$$x - 2y = 2 \xrightarrow{y = 5 - x} x - 2(5 - x) = 2$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = \quad}$

d) Sustituimos el valor de $x$ obtenido en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la primera.

$x + y = 5$

$\boxed{\phantom{0}} + y = 2$

$\boxed{y = \quad}$

Solución del sistema: $\boxed{x = \quad}$ $\boxed{y = \quad}$

e) Comprobamos la solución del sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} &= 5 \\ \boxed{\phantom{0}} - 2 \cdot \boxed{\phantom{0}} &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 2 &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ Si obtenemos este resultado, los valores de $x$ e $y$ son correctos.

**2** **Resuelve los sistemas mediante el método de sustitución y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 8 \\ 2x - y &= 9 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -x + y &= 7 \\ 3x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$

**3** **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba la solución del siguiente sistema.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{3x-1}{5} + 2y &= 1 \\ y + \frac{3x}{2} &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Hallamos el común denominador.

$$\left.\begin{aligned} \frac{3x-1}{5} + \frac{5\cdot 2y}{5} &= \frac{5\cdot 1}{5} \\ \frac{2\cdot y}{2} + \frac{3x}{2} &= \frac{2\cdot 2}{2} \end{aligned}\right\}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{aligned} \frac{3x-1}{\cancel{5}} + \frac{10y}{\cancel{5}} &= \frac{5}{\cancel{5}} \\ \frac{2y}{\cancel{2}} + \frac{3x}{\cancel{2}} &= \frac{4}{\cancel{2}} \end{aligned}\right\}$$

De esta manera obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 1 + 10y &= 5 \\ 2y + 3x &= 4 \end{aligned}\right\}$$

**Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. Comprueba la solución.**

**4** **Resuelve mediante el método de sustitución y comprueba la solución del siguiente sistema.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{3} + y &= 4 \\ x + \frac{y}{3} &= 6 \end{aligned}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 7 OBJETIVO 3
## RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**, debemos:

a) **Despejar** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
b) **Igualar** las expresiones obtenidas.
c) **Resolver** la ecuación de una incógnita que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
e) **Comprobar** la solución obtenida.

**EJEMPLO**

**Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} &= \mathbf{-1} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \mathbf{11} \end{aligned}\right\}$$

a) Elegimos para **despejar** la incógnita $y$ de las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 11 - 3x &= y \end{aligned}\right\}$$

b) **Igualamos** las expresiones obtenidas.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$

c) **Resolvemos** la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 11 - 3x \\ 2x + 3x &= 11 - 1 \\ 5x &= 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2}$$

d) **Sustituimos** el valor $x = 2$ en cualquiera de las ecuaciones. En este caso, elegimos la segunda.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11 \\ 3 \cdot 2 + y &= 11 \\ 6 + y &= 11 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 5}$$

e) **Comprobamos** la solución obtenida.

Para ello hay que sustituir el par de valores (2, 5) en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 2,\, y = 5} \left.\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 5 &= -1 \\ 3 \cdot 2 + 5 &= 11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 2$ e $y = 5$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

**1** **Resuelve el sistema mediante el método de igualación y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=77} \\ \boldsymbol{x-y=2} \end{array}\right\}$$

a) Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=77 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

b) Igualamos las ecuaciones obtenidas.

c) Resolvemos la ecuación de una incógnita obtenida.

d) Sustituimos el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

e) Comprobamos la solución.

**2** **Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de igualación y comprueba los resultados.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 2x-4y=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=10 \\ 4x+10y=20 \end{array}\right\}$

# 7

**3** **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ x + y = 10 \end{array}\right\}$$

a) Hallamos el común denominador.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x}{\cancel{6}} + \dfrac{2y}{\cancel{6}} = \dfrac{24}{\cancel{6}} \\ x + y = 10 \end{array}\right\}$$

b) Quitamos los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 24 \\ x + y = 10 \end{array}\right\}$$

**Ahora resuélvelo tal y como has hecho en ejercicios anteriores. Comprueba la solución.**

**4** **Resuelve mediante el método de igualación y comprueba la solución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{9} = 6 \end{array}\right\}$$

OBJETIVO 4

# RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDUCCIÓN



NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**, debemos:

a) **Buscar un sistema equivalente** donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
b) **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así una incógnita.
c) **Resolver** la ecuación que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
e) **Comprobar** la solución obtenida.

## EJEMPLO

**Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + 2y = 25} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 40} \end{aligned}\right\}$$

a) **Obtenemos** un sistema equivalente.

Elegimos una incógnita en las dos ecuaciones, en este caso $x$.

Multiplicamos la primera ecuación por 2.

$$\left.\begin{aligned} 2(x + 2y = 25) \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\}$$

Ahora el sistema equivalente es:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y = 50 \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\}$$

b) **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar la $x$.

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ -\ (2x + 3y = 40) \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2x + 4y = \phantom{-}50 \\ -2x - 3y = -40 \\ \hline y = \phantom{-}10 \end{array}$$

c) **Resolvemos** la ecuación de una incógnita que resulta.

$$\boxed{y = 10}$$

d) **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en este caso en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 25 \\ x + 2 \cdot 10 &= 25 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 5}$$

e) **Comprobamos** el resultado.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 5,\ y = 10} \left.\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 10 = 25 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 40 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 25 = 25 \\ 40 = 40 \end{aligned}\right\}$$

La solución del sistema es el par de valores $x = 5$ e $y = 10$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución, es decir, es un sistema compatible.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 7

**1** **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{3x - 2y = -10} \\ \mathbf{4x + 5y = 140} \end{array}\right\}$$

a) Obtenemos un sistema equivalente. Elegimos una incógnita, por ejemplo la *y*.

Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2.

$$\left.\begin{array}{l} 5(3x - 2y = -10) \\ 2(4x + 5y = 140) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 15x - 10y = -50 \\ 8x + 10y = 280 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema equivalente}$$

b) Sumamos las dos ecuaciones para eliminar la *y*.

$$\begin{array}{rl} 15x - \cancel{10y} & = -50 \\ + \quad 8x + \cancel{10y} & = \phantom{-}280 \\ \hline 23x \qquad & = \phantom{-}230 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$\boxed{x = \quad}$

d) Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtenemos el valor de *y*.

e) Comprobamos la solución.

**2** **Resuelve por el método de reducción el sistema y comprueba el resultado.**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{3x + 2y = 26} \\ \mathbf{2x - 3y = -13} \end{array}\right\}$$

Elegimos una incógnita: ¿Por qué número tenemos que multiplicar las ecuaciones para que esa incógnita desaparezca al sumarlas?

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\phantom{0}}\,(3x + 2y = 26) \\ \boxed{\phantom{0}}\,(2x - 3y = -13) \end{array}\right\} \rightarrow$$

 